

Exercice : Matrices de rang 1 [CCINP MP 2025]

Q1. Comme toutes les colonnes de J sont égales et non nulles, on a $\boxed{\text{rg}(J) = 1}$. De plus, $\boxed{\text{tr}(J) = 1 + \dots + 1 = n}$.

• Méthode 1 : On résout l'équation aux éléments propres $JX = \lambda X$ avec $X \in \mathbb{R}^n$ non nul et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{En notant } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, JX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \dots + x_n = \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_1 + \dots + x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

► 1^{er} cas : si $\lambda = 0$, il reste $x_1 + \dots + x_n = 0$, i.e. $x_1 = -x_2 - \dots - x_n$.

Ainsi $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } J}$ et les vecteurs propres associés sont de la forme $\begin{pmatrix} -x_2 - \dots - x_n \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\text{d'où } \boxed{E_0 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

► 2^e cas : si $\lambda \neq 0$, il reste $\begin{cases} x_1 = x_2 = \dots = x_n \\ x_1 + \dots + x_n = \lambda x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = \dots = x_n \\ n x_1 = \lambda x_1 \end{cases}$

Or si $x_1 = 0$ alors $x_2 = \dots = x_n = 0$, i.e. $X = 0_{\mathbb{R}^n}$ ce qui est exclu, d'où $x_1 \neq 0$, et ainsi $\begin{cases} x_1 = x_2 = \dots = x_n \\ \lambda = n \end{cases}$.

Autrement dit $\boxed{n \text{ est valeur propre de } J}$ et $\boxed{E_n = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$.

Méthode 2 : On remarque que $J^2 = nJ$ donc $X^2 - nX = X(X - n)$ annule J . En particulier $\text{Sp}(J) \subseteq \{0, n\}$.

On vérifie ensuite que 0 et n sont bien valeurs propres de J en résolvant $JX = 0$ et $JX = nX$ comme précédemment.

Rq : Comme $\dim(E_0) + \dim(E_n) = n$, on trouve que J est diagonalisable mais on le savait déjà car elle est symétrique réelle.

Méthode 3 astucieuse : On pose $K = \frac{1}{n}J$. On a $K^2 = \frac{1}{n^2}J^2 = \frac{1}{n}J = K$ donc K est un projecteur. En particulier $\text{Sp}(K) = \{0, 1\}$ donc $\text{Sp}(J) = \{0, n\}$, et $E_0(J) = E_0(K) = \text{Ker}(K) = \text{Ker}(J)$ et $E_n(J) = E_1(K) = \text{Im}(K) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

↳ calcul usuel.

Q2. Comme $\text{rg}(A) = 1$, toutes les colonnes de A sont proportionnelles.
 Comme C est la première colonne non nulle, $\text{Im}(A) = \text{Vect}(C)$ donc
toutes les colonnes sont colinéaires à C . Notons, pour $1 \leq k \leq n$,
 C_k la k^{e} colonne de A . Il existe donc $\alpha_k \in \mathbb{R}$ tel que $C_k = \alpha_k C$.
 Finalement avec $\boxed{L = (\alpha_1 \dots \alpha_n)}$, on a bien $A = C \times L$.

Q3. $L \times C = \sum_{k=1}^n [L]_{1,k} [C]_{k,1} = \sum_{k=1}^n [C]_{k,1} [L]_{1,k} = \sum_{k=1}^n [CL]_{k,k} \stackrel{\text{Q2}}{=} \sum_{k=1}^n [A]_{k,k} = \boxed{\text{tr}(A)}$.

↑
formule produit
matriciel

↑
formule produit matriciel
avec C qui a une seule
colonne et L une seule ligne.

• $A^2 \stackrel{\text{Q2}}{=} (C.L)(C.L) = C(\underbrace{L.C}_{=\text{tr}(A)}) = \text{tr}(A).C.L \stackrel{\text{Q2}}{=} \boxed{\text{tr}(A).A}$

Q4. D'après la question précédente, le polynôme $X^2 - \text{tr}(A).X = X(X - \text{tr}(A))$
 annule A donc $\text{Sp}(A) \subset \{0, \text{tr}(A)\}$.

► Si $\text{tr}(A) = 0$, $\text{Sp}(A) \subset \{0\}$.

On $\text{rg}(A) = 1$ donc d'après le théorème du rang, $\dim(\ker A) = n-1$ ^{car $n \geq 2$} et
 en particulier $0 \in \text{Sp}(A)$ (avec $m_0 \geq n-1$).

Ainsi $\boxed{\text{Sp}(A) = \{0\}}$ et donc $\boxed{\chi_A = X^n}$.

► Si $\text{tr}(A) \neq 0$.

Le raisonnement précédent reste valable et $0 \in \text{Sp}(A)$ avec $m_0 \geq n-1$.
 De plus $A.C \stackrel{\text{Q2}}{=} C.L.C \stackrel{\text{Q3}}{=} \text{tr}(A).C$ avec $C \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ par définition donc $\text{tr}(A)$
 est bien valeur propre de A (associé au vecteur propre C).

Ainsi $\boxed{\text{Sp}(A) = \{0, \text{tr}(A)\}}$ avec $\boxed{m_0 \geq n-1}$.

En particulier $\boxed{\chi_A = X^{n-1}(X - \text{tr}(A))}$

Rq: Cette égalité est en fait
 valable dans les 2 cas.

Q5. Si $\text{tr}(A) \neq 0$, d'après Q3, $X(X - \text{tr}(A))$ annule A et est scindé à racines
 simples donc A diagonalisable.

Si $\text{tr}(A) = 0$, d'après Q4, ~~$\text{Sp}(A) = \{0\}$~~ mais $X = (X - 0)$ n'annule pas
 A (car A est non nulle puisque $\text{rg}(A) = 1 \neq 0$) donc A n'est pas diagonalisable.

Finalement $\boxed{A \text{ est diagonalisable si } \text{tr}(A) \neq 0}$.

Q6. Comme $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, il existe $x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ tel que $x \in \text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u)$.

Or $\text{rg}(u) = \text{rg}(A) = 1$ donc nécessairement $\text{Im}(u) = \text{Vect}(x)$.

Or $x \in \text{Ker}(u)$ donc $\forall \lambda \in \mathbb{R}, u(\lambda x) = \lambda u(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$, i.e. $\text{Vect}(x) \subset \text{Ker}(u)$.

Par conséquent $\boxed{\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)}$

• Soit $e_1 \notin \text{Ker}(u)$ (possible car $\dim(\text{Ker } u) \stackrel{\text{pu}}{=} n-1 < n$ car $\text{rg}(u)=1$).

On pose $\boxed{e_2 = u(e_1)}$.

On a $e_2 \in \text{Im}(u)$ par définition et $e_2 \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ car $e_1 \notin \text{Ker}(u)$.

Or $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$ donc $e_2 \in \text{Ker}(u)$. On complète alors en $(e_2, \dots, e_n)$ base de $\text{Ker}(u)$.

Enfin, on vérifie aisément que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est libre (prendre une combinaison linéaire nulle et appliquer u puis utiliser le fait que $(e_2, \dots, e_n)$ est libre par construction), donc c'est une base de $\mathbb{R}^n$ car elle contient n vecteurs.

Par construction, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est de la forme demandée $\begin{pmatrix} u(e_1) = e_2 \\ \forall i \geq 2, u(e_i) = 0 \end{pmatrix}$ (et $\text{tr}(u) = 0$)

Q7. Comme $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) = \{0\}$ et $\dim(\text{Im}(u)) + \dim(\text{Ker}(u)) = \dim(\mathbb{R}^n)$ par le théorème du rang, on a $\boxed{\mathbb{R}^n = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u)}$.

Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à cette décomposition, $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$.

Comme $\text{rg}(u) = 1$, $\text{Im}(u) = \text{Vect}(f_1)$ donc $u(f_1) \in \text{Im}(u)$ s'écrit $u(f_1) = \alpha f_1$ pour un $\alpha \in \mathbb{R}$. De plus $\alpha \neq 0$ car sinon $f_1 \in \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$, absurde.

Par construction, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est de la forme demandée $\begin{pmatrix} u(f_1) = \alpha f_1 \\ \forall i \geq 2, f_i \in \text{Ker}(u) \end{pmatrix}$ (et $\text{tr}(u) \neq 0$)

Q8. $\Rightarrow$ Si $B = P A P^{-1}$ avec $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ alors $\text{Tr}(B) = \text{Tr}(P A P^{-1}) = \text{Tr}(A P^{-1} P) = \text{Tr}(A)$.

$\Leftarrow$ Si $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) = 0$, par Q23, A et B sont semblables à $\begin{pmatrix} 0 & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ donc semblables entre elles.

• Si $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) \neq 0$, par Q24, A est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & \\ & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha = \text{tr}(A)$ et B est semblable à $\begin{pmatrix} \beta & \\ & 0 \end{pmatrix}$ avec $\beta = \text{tr}(B)$.

Comme $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$, A et B sont donc semblables à la même matrice donc semblables entre elles.

Finalement $\boxed{A \text{ et } B \text{ de rang } 1 \text{ sont semblables si } \text{tr}(A) = \text{tr}(B)}$.